Приложение 2 к РПД
Дифференциальные уравнения
01.03.02 Прикладная математика и информатика
направленность (профиль)
Управление данными и машинное обучение
Форма обучения – очная
Год набора – 2021

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
3.	Направленность (профиль)	Управление данными и машинное обучение
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.15.06 Дифференциальные уравнения
5.	Форма обучения	Очная
6.	Год набора	2021

2. Перечень компетенций

ОПК-1: Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

<table>
<tr><th rowspan="2">Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)</th><th rowspan="2">Формируемая компетенция</th><th colspan="3">Критерии и показатели оценивания компетенций</th><th rowspan="2">Формы контроля сформированности компетенций</th></tr>
<tr><th>Знать:</th><th>Уметь:</th><th>Владеть:</th></tr>
<tr><td>Дифференциальные уравнения первого порядка</td><td>ОПК-1</td><td rowspan="3">знать основные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, способы понижения порядка для уравнений высших порядков</td><td rowspan="3">решать задачи по разделам курса, применять теоретический материал, творчески подходить к решению профессиональных задач, ориентироваться в нестандартных условиях и ситуациях, анализировать возникающие проблемы</td><td rowspan="3">Владеть методами и приемами решения практических задач и доказательства утверждений</td><td rowspan="3">Контрольная работа
Индивидуальное домашнее задание
тест
лабораторная работа</td></tr>
<tr><td>Дифференциальные уравнения высших порядков</td><td>ОПК-1</td></tr>
<tr><td>Системы дифференциальных уравнений</td><td>ОПК-1</td></tr>
</table>

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1 Тест

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-100
Количество баллов за решенный тест	6	8	10

4.2 Контрольная работа

Баллы	Критерии оценивания
8	контрольная работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием непонимания материала)
6	контрольная работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна негрубая ошибка или два-три недочета в выкладках или графиках, если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки
4	студент допустил более одной грубой ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках и графиках, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме.
0	студент показал полное отсутствие обязательных знаний и умений по проверяемой теме

Примечание:

- К **грубым** ошибкам относятся незнание студентом формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять, незнание приемов решения задач, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.
- К **негрубым** ошибкам относятся вычислительные ошибки, если они являются опиской, потеря решения уравнения или сохранение в ответе постороннего корня.
- К *н***едочетам** относятся нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решении задания.

4.3 Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ)

Баллы	Характеристика индивидуального домашнего задания
4	Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено полностью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены без замечаний.
3	Уровень расчетно-графической работы отвечает всем требованиям, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено полностью, при этом некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, но все предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены, некоторые из них содержат негрубые ошибки.
2	Уровень расчетно-графической работы не отвечает большинству требований, предъявляемым к выполнению ИДЗ, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено частично, некоторые практические навыки работы не сформированы, отдельные предусмотренные программой обучения задания ИДЗ выполнены с грубыми ошибками.
0	Уровень выполнения ИДЗ показывает, что теоретическое содержание раздела дисциплины не освоено, необходимые практические навыки работы не сформированы, все выполненные задания ИДЗ содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения заданий ИДЗ.

Требования, предъявляемые к выполнению ИДЗ**:**

- ИДЗ должно базироваться на знаниях теоретических и методических вопросах дисциплины «Математический анализ». Работа должна содержать элементы творчества, новизны, направленные на эффективное решение заданий ИДЗ;
- ИДЗ должно отразить глубину теоретической подготовки студента, понимание контролируемого учебного материала по дисциплине «Математический анализ»: умение связывать теоретические положения с их практическим применением, способность самостоятельно формировать и обосновывать собственные выводы, логически и грамотно излагать свои мысли;
- в ИДЗ не допускается переписывание учебников, учебных пособий и других источников;
- Студент – автор ИДЗ полностью отвечает за предложенные решения заданий и правильность всех данных, приведенных в ИДЗ;
- ИДЗ должно быть сдана в назначенный руководителем срок.

4.4 Лабораторная работа

Баллы	**Характеристика индивидуального домашнего задания**
8	Полученные ранее знания для проведения анализа, опыта, эксперимента и выполнения последующих расчетов, а также составления выводов сформированы недостаточно. Лабораторная работа выполнена без замечаний.
6	Полученные ранее знания для проведения анализа, опыта, эксперимента и выполнения последующих расчетов, а также составления выводов сформированы. Лабораторная работа выполнена полностью, с небольшими без замечаний
4	Уровень выполнения лабораторной работы не отвечает большинству требований, теоретическое содержание раздела дисциплины освоено частично, некоторые практические навыки работы не сформированы.
0	Уровень выполнения лабораторной работы, что теоретическое содержание раздела дисциплины, необходимые практические навыки не сформированы.

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.

5.1. Типовая контрольная работа

Вариант 0

Задача 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Задача 2.

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$.

Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

Задача 3.

Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$
$$y\cos y dy = -2xdx$$
$$\int y\cos y dy = -2\int xdx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$
$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$
$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается отличие общего (частного) интеграла от общего (частного) решения.

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной х.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$yy' = -\dfrac{2x}{\cos y}$ - верно

Задача 4.

Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$u = \dfrac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u$.

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\dfrac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$

Разделяем переменные: $\dfrac{du}{u\ln u} = \dfrac{dx}{x}; \quad \displaystyle\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

Задача 5.

Решить уравнение $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0.$

Получаем $(x - 2y + 3)\dfrac{dy}{dx} = -2x - y + 1; \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1/5 \\ y = 7/5 \end{cases};$

Применяем подстановку $x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5;$ в исходное уравнение:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$
$$(u - 2v)dv + (2u + v)du = 0;$$
$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заменяем переменную $\dfrac{v}{u} = t; \quad v = ut; \quad v' = t'u + t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u + t = \frac{2 + t}{2t - 1}$$

Разделяем переменные: $\dfrac{dt}{du}u = \dfrac{2 + t}{2t - 1} - t = \dfrac{2 + t - 2t^2 + t}{2t - 1} = \dfrac{2(1 + t - t^2)}{2t - 1};$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1 - 2t}{1 + t - t^2}dt; \qquad \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1 - 2t)dt}{1 + t - t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = -2\ln|C_1 u|$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \quad u = x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

5.2. Типовой тест

1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое неизвестная функция входит

1). под знаком интеграла
2). под знаком производной или дифференциала
3). под знаком логарифма
4). в неявном виде

2. Решением дифференциального уравнения $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ называется функция $y = y(x)$, если она

1). удовлетворяет начальным условиям
2). n раз дифференцируема на промежутке I
3). монотонна на промежутке I
4). обращает при подстановке уравнение в тождество

3. Общим интегралом дифференциального уравнения $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ является семейство функций вида

1). $\varphi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$
2). $y = \varphi(x, c)$
3). $\varphi(x, y, c_1, c_2) = 0$
4). $y = c_1\,\varphi(x) + c_2$

4. Задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, формулируют следующим образом (укажите правильные варианты ответа):

1). Найти решение *y(x)* такое, что $y(x_0) = y_0$

2). Найти решение *y(x)* такое, что $y(x_0) = f(x_0, y_0)$

3). Найти интегральную кривую, проходимую через заданную точку (x_0, y_0)

4). Найти семейство интегральных кривых вида $y=\varphi(x, c)$

5. Для приближенного построения интегральных кривых используется метод

1). Изотерм

2). Эйлера

3). неопределенных коэффициентов

4). изоклин

6. Уравнение семейства изоклин для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ имеет вид:

1). $y = kx$

2). $x^2 + y^2 = k, \ \ k \geq 0$

3). $y = kx + b$

4). $y = kx^2$

7. Функция $y = x\,(Sinx + 1)$ является решением уравнения:

1). $xy' = y + x\,Sin\,x$

2). $y' = (1 - y)\,Cos\,x$

3). $y = x(y' - x\,Cos\,x)$

4). $y' = Cos\,(y - x)$

8. Уравнениями с разделяющимися переменными являются уравнения вида:

1). $f(y)\,dy = g(x)\,dx$

2). $y' = f(x,y)$

3). $y' = f(\frac{y}{x})$

4). $y' = g(x)\,p(y)$

9. Найдите общий интеграл уравнения $y' = tgx \cdot tgy$:

1). $Siny = cCosx$

2). $\frac{1}{sin^2 y} = \frac{c}{cos^2 x}$

3). $Siny\,Cosx = c$

4). $tgy\,ctgx = c$

10. Найдите общий интеграл уравнения $x(y^2 - 4)\,dx + ydy = 0$:

1). $\frac{y^2}{2} - 4\,ln\,y = \frac{x^2}{2} + c$

2). $y^2 - 4 = ce^{-x^2}$

3). $y^2 - 4 = ce^{x^2}$

4). $\sqrt{y^2 - 4} = ce^{x^2}$

Ключ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
б	б,в	а	б,в	г	б	в	а,г	в	в

5.3. Вопросы к зачету

1. ДУ первого порядка, его решение, геометрическое истолкование ДУ и его решений
2. Интегрирование ДУ первого порядка с разделяющимися переменными
3. Интегрирование однородных ДУ первого порядка
4. Интегрирование линейных ДУ первого порядка
5. Интегрирование ДУ Бернулли
6. Интегрирование ДУ первого порядка в полных дифференциалах
7. ДУ высших порядков, допускающих понижение порядка
8. Линейные однородные ДУ высших порядков.
9. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.
10. общее решение при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения, его вещественная форма
11. Линейные неоднородные ДУ второго порядка, теорема о структуре общего решения, теорема о суперпозиции решений
12. Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения для правой части специального вида методом неопределенных коэффициентов
13. Обобщение результатов на линейные уравнения n-го порядка
14. Основные понятия о дифференциальных уравнениях n-го порядка
15. Определитель Вронского. Критерий линейной независимости системы функций
16. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Общее и частное решение
17. Фундаментальная система решения. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка
18. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными
19. Построение общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами
20. Определение линейно зависимых и независимых функций. Первое свойство линейной зависимости
21. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка
22. Уравнение Бернулли
23. Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка
24. Уравнение в полных дифференциалах
25. Решение линейных неоднородных уравнений второго порядка со специальной правой частью $f(x) = e^{\alpha x} Pu(x)$
26. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными
27. Построение фундаментальной системы решений для ЛОУ второго порядка с постоянными коэффициентами (D=0)
28. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка
29. Уравнения в полных дифференциалах
30. Теорема о суперпозиции решений линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
31. Задача Коши для дифференциальных уравнений n-го порядка. Теорема существования и единственности. Общее и частное решение
32. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка
33. Разностные (рекуррентные) уравнения второго порядка. Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме). Решение уравнения подстановкой.
34. Линейные разностные (рекуррентные) уравнения. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения. Уравнения с постоянными коэффициентами.